Die Geometrie der Cheops-Pyramide Lehrplan 21

THM-20260506085209 • Mathematics

- Die Schülerinnen und Schüler können die geometrischen Eigenschaften von Pyramiden beschreiben und die Cheops-Pyramide als mathematisches Modell darstellen.
- Sie wenden den Satz des Pythagoras und trigonometrische Methoden zur Berechnung von Streckenlängen, Winkeln und Flächen in dreidimensionalen Körpern an.
- Sie berechnen Volumen und Oberfläche von Pyramiden und nutzen dabei Formeln korrekt.
- Sie analysieren mathematische Proportionen und Besonderheiten der Cheops-Pyramide und bewerten historische mathematische Theorien kritisch.
- Sie verbinden geometrisches Wissen mit kulturhistorischen Kontexten und erkennen die Bedeutung der Mathematik in der antiken Baukunst.

LEHRPERSON
DEMO Teacher

KLASSE
Maths 9C

PÄDAGOGISCHER ANSATZ
Traditional/Direct Instruction

MODUS
Selbstgesteuert

Direkt zum Lernpfad

Scanne diesen QR-Code mit deinem Gerät, um direkt auf den Lernpfad zuzugreifen.

ID: LP-696

Definitionen & Vorwissen

Die Geometrie der Cheops-Pyramide - Lehrplan 21

Mathematics | Maths 9C | THM-20260506085209

Wichtige Begriffe

Pyramide
Ein dreidimensionaler geometrischer Körper mit einer Grundfläche (meist Vieleck) und Seitenflächen, die sich in einem gemeinsamen Punkt (Spitze) treffen.

Satz des Pythagoras
Eine mathematische Regel für rechtwinklige Dreiecke: $a^2 + b^2 = c^2$, wobei c die Hypotenuse (längste Seite) und a und b die Katheten (kürzere Seiten) sind.

Trigonometrie
Ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit den Beziehungen zwischen Winkeln und Seitenlängen in Dreiecken beschäftigt, insbesondere mit Sinus, Kosinus und Tangens.

Volumen
Der Rauminhalt eines dreidimensionalen Körpers, also wie viel Platz er einnimmt. Bei Pyramiden gilt: $V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$.

Oberfläche
Die Summe aller Flächeninhalte, die einen Körper umgeben. Bei einer Pyramide: Grundfläche plus alle Seitenflächen.

Goldener Schnitt
Ein besonderes Teilungsverhältnis von etwa 1:1,618, das in Natur, Kunst und Architektur als besonders harmonisch empfunden wird.

Kreiszahl π (Pi)
Eine mathematische Konstante mit dem Wert ca. 3,14159, die das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises beschreibt.

Räumliches Vorstellungsvermögen
Die Fähigkeit, sich dreidimensionale Objekte und ihre Eigenschaften (Längen, Winkel, Flächen) im Kopf vorzustellen und zu verstehen.

Vorkenntnisse

Rechtwinkliges Dreieck
Ein Dreieck mit einem 90°-Winkel. Die Seiten haben spezielle Namen: Hypotenuse (gegenüber dem rechten Winkel) und Katheten (die beiden anderen Seiten).

Beispiel:

Ein Dreieck mit den Seitenlängen 3 cm, 4 cm und 5 cm ist rechtwinklig, weil $3^2 + 4^2 = 5^2$ (9 + 16 = 25).

Flächenberechnung von Vielecken

Die Fähigkeit, den Flächeninhalt von geometrischen Figuren wie Quadraten, Rechtecken und Dreiecken zu berechnen.

> **Beispiel:**
>
> Ein Quadrat mit Seitenlänge 10 m hat eine Fläche von $A = 10 \cdot 10 = 100\ m^2$. Ein Dreieck mit Grundseite 6 cm und Höhe 4 cm hat $A = ½ \cdot 6 \cdot 4 = 12\ cm^2$.

Winkelmessung

Winkel werden in Grad (°) gemessen, wobei ein voller Kreis 360° hat, ein rechter Winkel 90° und ein gestreckter Winkel 180°.

> **Beispiel:**
>
> Ein gleichseitiges Dreieck hat drei Winkel von je 60°, da 3 · 60° = 180° (Winkelsumme im Dreieck).

Grundlegende trigonometrische Funktionen

Sinus, Kosinus und Tangens beschreiben Verhältnisse von Seiten in rechtwinkligen Dreiecken und helfen, unbekannte Seiten oder Winkel zu berechnen.

> **Beispiel:**
>
> In einem rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α gilt: $\sin(\alpha)$ = Gegenkathete/Hypotenuse. Bei α = 30° und Hypotenuse 10 cm ist die Gegenkathete 5 cm.

Einheiten umrechnen

Die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Masseinheiten zu wechseln, z.B. Meter in Zentimeter oder Quadratmeter in Quadratzentimeter.

> **Beispiel:**
>
> Die Cheops-Pyramide hat eine ursprüngliche Höhe von etwa 146,6 m = 14.660 cm = 146.600 mm.

Geometrische Untersuchungen der Cheops-Pyramide

Die Geometrie der Cheops-Pyramide

Eine mathematische Reise zu einem der sieben Weltwunder der Antike

Wusstest du?

Die Cheops-Pyramide war über 3800 Jahre das höchste Bauwerk der Welt – mit einer ursprünglichen Höhe von etwa 146,6 Metern. Die Präzision, mit der die alten Ägypter dieses Monument errichteten, fasziniert Mathematiker bis heute. Doch wie berechnet man eigentlich das Volumen einer Pyramide? Und stecken wirklich mathematische Konstanten wie π oder der goldene Schnitt in den Proportionen verborgen?

Was du in dieser Lerneinheit lernen wirst:

- Die geometrischen Grundlagen von Pyramiden verstehen und beschreiben
- Den Satz des Pythagoras und trigonometrische Methoden auf dreidimensionale Körper anwenden
- Volumen und Oberfläche von Pyramiden berechnen
- Mathematische Besonderheiten der Cheops-Pyramide kritisch untersuchen
- Verbindungen zwischen Mathematik und Kulturgeschichte erkennen

1. Grundlagen der Pyramidengeometrie

Pyramiden gehören zu den faszinierendsten geometrischen Körpern. Bevor wir uns mit komplexen Berechnungen beschäftigen, müssen wir die grundlegenden Begriffe und Eigenschaften verstehen. Diese bilden das Fundament für alle weiteren Untersuchungen.

1.1 Geometrische Grundformen und Eigenschaften von Pyramiden

Eine **Pyramide** ist ein geometrischer Körper (Polyeder), der durch einen ebenen Vieleck als Grundfläche und dreieckige Seitenflächen definiert wird, die sich in einem gemeinsamen Punkt – der Spitze – treffen. Im Gegensatz zu Prismen, die zwei parallele Grundflächen besitzen, hat eine Pyramide nur eine Grundfläche.

Definition einer Pyramide:

Eine Pyramide ist ein Körper, der entsteht, wenn man alle Punkte eines ebenen Vielecks (der Grundfläche) mit einem Punkt ausserhalb der Ebene (der Spitze) verbindet. Die Verbindungsstrecken bilden die Kanten, die begrenzenden Flächen zwischen den Kanten heissen Seitenflächen.

Pyramiden werden nach der Form ihrer Grundfläche benannt:

Art der Pyramide	Grundfläche	Anzahl Seitenflächen
Dreiseitige Pyramide (Tetraeder)	Dreieck	3
Vierseitige Pyramide	Viereck	4
Fünfseitige Pyramide	Fünfeck	5
Sechseckige Pyramide	Sechseck	6

Warum ist das wichtig? Die Klassifizierung hilft uns, die richtige Strategie für Berechnungen zu wählen. Die Cheops-Pyramide ist eine **quadratische Pyramide** – ihre Grundfläche ist ein Quadrat. Das vereinfacht viele Berechnungen erheblich, da wir die Eigenschaften von Quadraten nutzen können.

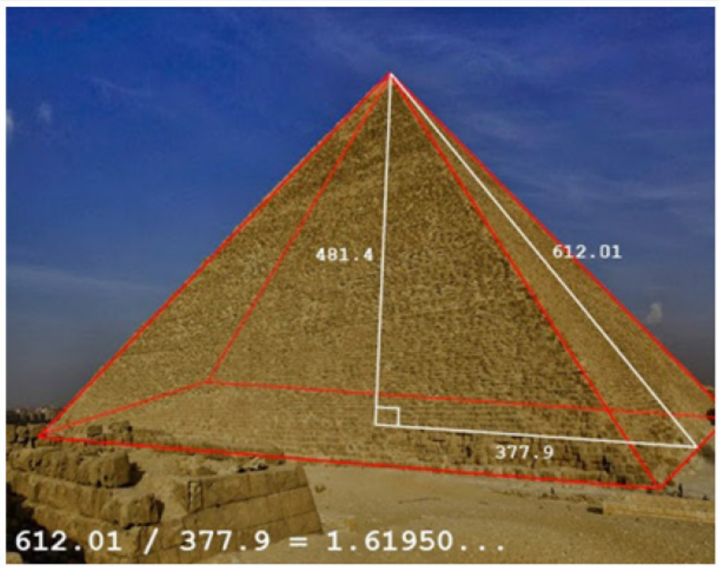


Figure 2: From Internet: Images of the Pyramids.

1.2 Die Grundfläche

Die **Grundfläche** ist das Fundament einer Pyramide. Bei der Cheops-Pyramide handelt es sich um ein nahezu perfektes Quadrat. Die Seitenlänge betrug ursprünglich etwa 230,36 Meter – das entspricht ungefähr der Länge von zwei Fussballfeldern!

Mathematische Darstellung

Für eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge aaa gilt für den Flächeninhalt:

G=a2G = a^2

G = a2

Für die Cheops-Pyramide: G=(230,36 m)2 53 066 m2G = (230,36\,\text{m})^2 \approx 53\,066\,\text{m}^2G = (230, 36 m)2   53 066 m2

Die Grundfläche der Cheops-Pyramide ist mit einer Genauigkeit von wenigen Zentimetern eingeebnet – eine bemerkenswerte Leistung, wenn man bedenkt, dass die alten Ägypter keine modernen Vermessungsgeräte hatten. In der Schweiz kennen wir Präzision von den präzisen Uhrwerken aus dem Vallée de Joux – die Ägypter erreichten ähnliche Genauigkeit vor über 4500 Jahren!

1.3 Die Seitenflächen

Die **Seitenflächen** einer Pyramide sind Dreiecke, die die Grundfläche mit der Spitze verbinden. Bei einer quadratischen Pyramide wie der Cheops-Pyramide gibt es vier identische, gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen.

Jede Seitenfläche hat drei wichtige Strecken:

- **Die Grundkante**: Die Seite des Dreiecks, die auf der Grundfläche liegt (Länge aaa)
- **Die Seitenkante**: Die beiden gleichen Seiten des Dreiecks, die von der Grundkante zur Spitze führen (Länge sss)
- **Die Höhe der Seitenfläche**: Die Strecke von der Mitte der Grundkante senkrecht zur Spitze (Länge hsh_shs)

Berechnung des Flächeninhalts einer Seitenfläche

Für eine Seitenfläche als gleichschenkliges Dreieck gilt:

ASeite=12 a hsA_{Seite} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s

$$A_{Seite} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$

Die gesamte Mantelfläche (ohne Grundfläche) ist dann: M=4 ASeite=2 a hsM = 4 \cdot A_{Seite} = 2 \cdot a \cdot h_sM = 4 ASeite = 2 a hs

1.4 Die Höhe

Die **Höhe** einer Pyramide (bezeichnet mit hhh) ist der senkrechte Abstand von der Spitze zur Grundfläche. Bei einer regelmässigen Pyramide fällt der Fusspunkt der Höhe genau in den Mittelpunkt der Grundfläche.

Die Höhe ist von zentraler Bedeutung, weil:

- Sie für die Volumenberechnung unerlässlich ist
- Sie zusammen mit der halben Grundkante den Neigungswinkel bestimmt
- Sie bei der Cheops-Pyramide ursprünglich 146,59 Meter mass

Wichtige Unterscheidung

Körperhöhe (hhh): Senkrechte von der Spitze zur Grundfläche

Seitenflächendicke (hsh_shs): Höhe des dreieckigen Seitenfläche

Diese beiden Grössen sind *nicht* identisch! Bei der Cheops-Pyramide gilt näherungsweise: hs>hh_s > hhs > h

1.5 Die Kanten

Bei einer Pyramide unterscheiden wir zwei Arten von Kanten:

Grundkanten sind die Kanten, die die Grundfläche begrenzen. Bei der Cheops-Pyramide mit ihrer quadratischen Grundfläche gibt es vier Grundkanten, jede mit der Länge a 230,36 ma \approx 230,36\,\text{m}a 230, 36 m.

Seitenkanten verbinden die Eckpunkte der Grundfläche mit der Spitze. Eine quadratische Pyramide hat vier Seitenkanten, die alle die gleiche Länge sss haben. Diese ist länger als die Körperhöhe!

Zusammenhang der Kantenlängen

In einer quadratischen Pyramide stehen die verschiedenen Längen in einem geometrischen Zusammenhang:

- Die halbe Diagonale der Grundfläche: dhalb=a22d_{halb} = \frac{a\sqrt{2}}{2}dhalb = 2a 2 √
- Mit dem Satz des Pythagoras: s2=h2+dhalb2s^2 = h^2 + d_{halb}^2s2 = h2 + dhalb2

1.6 Die Spitze

Die **Spitze** (auch Apex genannt) ist der gemeinsame Schnittpunkt aller Seitenkanten. Bei einer regelmässigen Pyramide liegt die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.

Die Spitze der Cheops-Pyramide ist heute nicht mehr erhalten – sie ist im Laufe der Jahrtausende abgetragen worden. Ursprünglich war sie möglicherweise mit einer vergoldeten Pyramidenspitze (einem sogenannten "Pyramidion") gekrönt. Die heutige Höhe der Pyramide beträgt nur noch etwa 138,8 Meter.

Charakteristische Merkmale der Cheops-Pyramide

- Quadratische Grundfläche mit Seitenlänge ca. 230,36 m
- Ursprüngliche Höhe: ca. 146,59 m
- Vier identische gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen
- Neigungswinkel der Seitenflächen: ca. 51,5°
- Die Kanten sind auf wenige Zentimeter genau gleich lang
- Die Grundfläche ist fast perfekt horizontal eingeebnet

2. Berechnungen an der Cheops-Pyramide

Nachdem wir nun die Grundlagen kennen, können wir konkrete Berechnungen durchführen. Die Cheops-Pyramide bietet ein hervorragendes Anwendungsbeispiel für den Satz des Pythagoras und trigonometrische Methoden in drei Dimensionen.

2.1 Der Satz des Pythagoras bei Pyramiden

Der Satz des Pythagoras ist eines der wichtigsten Werkzeuge in der Geometrie. Er besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b sowie der Hypotenuse c gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bei einer Pyramide finden wir mehrere rechtwinklige Dreiecke, die wir für Berechnungen nutzen können:

Die drei wichtigen rechtwinkligen Dreiecke

1. Das Höhendreieck (Längsschnitt durch die Mitte):

- Kathete 1: Körperhöhe h
- Kathete 2: halbe Grundkante $\frac{a}{2}$
- Hypotenuse: Seitenflächendicke h_s

$$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

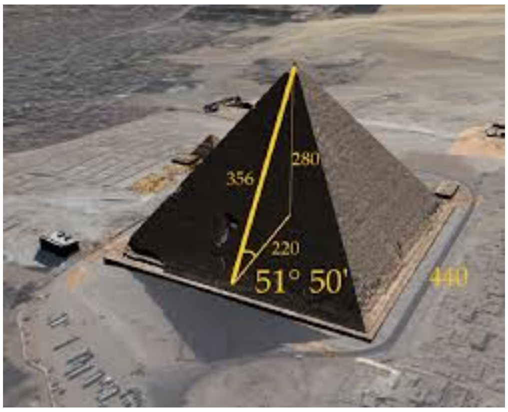
2. Das Kantendreieck (durch Spitze und Ecke):

- Kathete 1: Körperhöhe h
- Kathete 2: halbe Diagonale $\frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
- Hypotenuse: Seitenkante s

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

3. Das Seitendreieck (in der Seitenfläche):

- Kathete 1: Seitenflächendicke hsh_shs
- Kathete 2: halbe Grundkante a2\frac{a}{2}2a
- Hypotenuse: Seitenkante sss



311 × 249

2.2 Trigonometrische Berechnungen

Die Trigonometrie ermöglicht es uns, Winkel und Strecken in Dreiecken zu berechnen. Die drei wichtigsten trigonometrischen Funktionen sind:

Funktion	Formel	Anwendung
Sinus	sin(α)=GegenkatheteHypotenuse\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} sin(α) = HypotenuseGegenkathete	Winkelberechnung, Höhen
Kosinus	cos(α)=AnkatheteHypotenuse\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}cos(α) = HypotenuseAnkathete	Winkelberechnung, Grundkanten
Tangens	tan(α)=GegenkatheteAnkathete\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} tan(α) = AnkatheteGegenkathete	Steigung, Neigungswinkel

Warum trigonometrische Funktionen? Während der Satz des Pythagoras nur Strecken verbindet, erlauben uns die trigonometrischen Funktionen, Winkel zu berechnen. Das ist besonders wichtig für den Neigungswinkel der Pyramide.

2.3 Berechnung von Seitenkanten

Die Seitenkante sss verbindet eine Ecke der Grundfläche mit der Spitze. Für ihre Berechnung nutzen wir das "Kantendreieck".

Beispielrechnung: Seitenkante der Cheops-Pyramide

Gegeben: Höhe $h = 146,59\,\text{m}$, Grundkante $a = 230,36\,\text{m}$

Gesucht: Seitenkante s

Lösung:

Halbe Diagonale: $\frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{230,36 \cdot \sqrt{2}}{2} \approx 162,91\,\text{m}$

Nach Pythagoras: $s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$

$s^2 = 146,59^2 + 162,91^2 = 21488,63 + 26539,87 = 48028,50$

$s = \sqrt{48028,50} \approx 219,15\,\text{m}$

Die Seitenkanten der Cheops-Pyramide sind also etwa 219 Meter lang – länger als zwei Schweizer Fussballfelder (ein Standardfeld ist etwa 105 Meter lang)!

2.4 Berechnung von Flächendiagonalen

Die **Flächendiagonale** ist die Diagonale der quadratischen Grundfläche. Für ein Quadrat mit Seitenlänge a gilt:

$$d = a\sqrt{2}$$

Für die Cheops-Pyramide: $d = 230,36 \cdot \sqrt{2} \approx 325,82\,\text{m}$

Wichtige Erkenntnis

Die Flächendiagonale der Cheops-Pyramide ist mehr als doppelt so lang wie ihre Höhe! Das zeigt, wie "flach" die Pyramide im Verhältnis zu ihrer Grundfläche eigentlich ist. Der Neigungswinkel von etwa 51,5° ist relativ steil, aber die Pyramide wirkt aus der Ferne dennoch gedrungen.

2.5 Berechnung von Neigungswinkeln

Der **Neigungswinkel** (auch Böschungswinkel genannt) ist der Winkel zwischen einer Seitenfläche und der horizontalen Grundfläche. Er charakterisiert die "Steilheit" der Pyramide.

Berechnung des Neigungswinkels

Im Höhendreieck bildet der Neigungswinkel α den Winkel zwischen der Seitenflächendicke h_s und der halben Grundkante $\frac{a}{2}$.

Mit dem Tangens:

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a}$$

Für die Cheops-Pyramide:

$$\tan(\alpha) = \frac{2 \cdot 146,59}{230,36} \approx 1,2725$$

$$\alpha = \arctan(1,2725) \approx 51,84°$$

Der Neigungswinkel von etwa 51,5° bis 51,8° ist kein Zufall – er hat eine besondere mathematische Bedeutung, wie wir später sehen werden.

2.6 Historische Messdaten und ihre Überprüfung

Die Vermessung der Cheops-Pyramide hat eine lange Geschichte. Verschiedene Forscher haben zu unterschiedlichen Zeiten Messungen durchgeführt – mit teilweise leicht abweichenden Ergebnissen.

Forscher	Jahr	Grundkante (m)	Höhe (m)
Flinders Petrie	1880	230,36	146,59
Cole	1925	230,36	146,59
Lehner	1984	230,33	146,50

> **Kritische Betrachtung**
>
> Die Abweichungen zwischen den Messungen betragen nur wenige Zentimeter bei einem Bauwerk von über 230 Metern Seitenlänge! Das entspricht einer relativen Genauigkeit von etwa 0,01% – bemerkenswert für ein Bauwerk, das vor über 4500 Jahren errichtet wurde. Moderne Schweizer Ingenieurbüros, wie sie beim Gotthard-Basistunnel zum Einsatz kamen, erreichen ähnliche Präzisionen, aber mit modernster Technologie.

Überprüfung historischer Daten: Wir können die Konsistenz der Messungen prüfen, indem wir verschiedene Berechnungen durchführen und die Ergebnisse vergleichen. Wenn beispielsweise die Seitenkante mit den Daten von Petrie berechnet wird, sollte sie mit archäologischen Befunden übereinstimmen.

3. Volumen, Oberfläche und der goldene Schnitt

In diesem Abschnitt berechnen wir das Volumen und die Oberfläche der Cheops-Pyramide und untersuchen faszinierende mathematische Besonderheiten, die Wissenschaftler seit Jahrhunderten beschäftigen.

3.1 Volumenberechnung

Das Volumen einer Pyramide lässt sich mit einer eleganten Formel berechnen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Dabei ist G der Flächeninhalt der Grundfläche und h die Höhe. Der Faktor $\frac{1}{3}$ ist dabei entscheidend – er bedeutet, dass eine Pyramide genau ein Drittel des Volumens eines Prismas mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe hat.

Berechnung für die Cheops-Pyramide

Schritt 1: Grundfläche berechnen

$$G = a^2 = (230{,}36)^2 = 53\,065{,}73\,\text{m}^2$$

Schritt 2: Volumen berechnen

$$V = \frac{1}{3} \cdot 53\,065{,}73 \cdot 146{,}59$$

$$V \approx 2\,593\,400\,\text{m}^3$$

Zum Vergleich

Das Volumen der Cheops-Pyramide entspricht etwa 1000 olympischen Schwimmbecken (je 2500 m^3) oder könnte den Zürichsee an einigen Stellen über 2 Meter hoch füllen! Die Königinmütze des Matterhorns hingegen hat ein geschätztes Volumen von nur etwa 500 Millionen m^3 – die Pyramide ist also ein vergleichsweise "kleines" Bauwerk in der Natur.

3.2 Oberflächenberechnung

Die Gesamtoberfläche einer Pyramide setzt sich aus der Grundfläche und der Mantelfläche zusammen:

$$O = G + M$$

Für eine quadratische Pyramide mit der Seitenflächendicke h_s gilt für die Mantelfläche:

$$M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = 2 \cdot a \cdot h_s$$

Berechnung für die Cheops-Pyramide

Schritt 1: Seitenflächendicke berechnen

$$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{146,59^2 + 115,18^2}$$

$$h_s = \sqrt{21488,63 + 13266,43} = \sqrt{34755,06} \approx 186,43\,\text{m}$$

Schritt 2: Mantelfläche berechnen

$$M = 2 \cdot 230,36 \cdot 186,43 \approx 85\,879\,\text{m}^2$$

Schritt 3: Gesamtoberfläche

$$O = 53\,066 + 85\,879 \approx 138\,945\,\text{m}^2$$

Die Oberfläche entspricht etwa der Fläche von 19 Fussballfeldern! Ursprünglich war die Pyramide mit weissem Kalkstein verkleidet, der sie im Sonnenlicht strahlend hell erstrahlen liess.

3.3 Verschiedene Berechnungsmethoden

Es gibt mehrere Methoden, Volumen und Oberfläche zu berechnen. Jede hat ihre Vor- und Nachteile:

Methode	Beschreibung	Vorteil
Direkte Formel	$V = \frac{1}{3}Gh$	Schnell, genau
Integralrechnung	Aufsummieren von Scheiben	Zeigt Herkunft der Formel
Zerlegungsmethode	Pyramide als Summe kleinerer Pyramiden	Intuitiv verständlich

3.4 Das Verhältnis von Höhe zu Grundkante

Ein besonders interessantes Mass ist das Verhältnis der Höhe zur halben Grundkante:

$$\frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a}$$

Für die Cheops-Pyramide:

$$\frac{2 \cdot 146,59}{230,36} \approx 1,272$$

Dieser Wert ist bemerkenswert nahe an $\sqrt{\varphi} \approx 1,272$ (wobei φ der goldene Schnitt ist) und auch nahe an $\frac{4}{\pi} \approx 1,273$. Ist das Zufall oder Absicht?

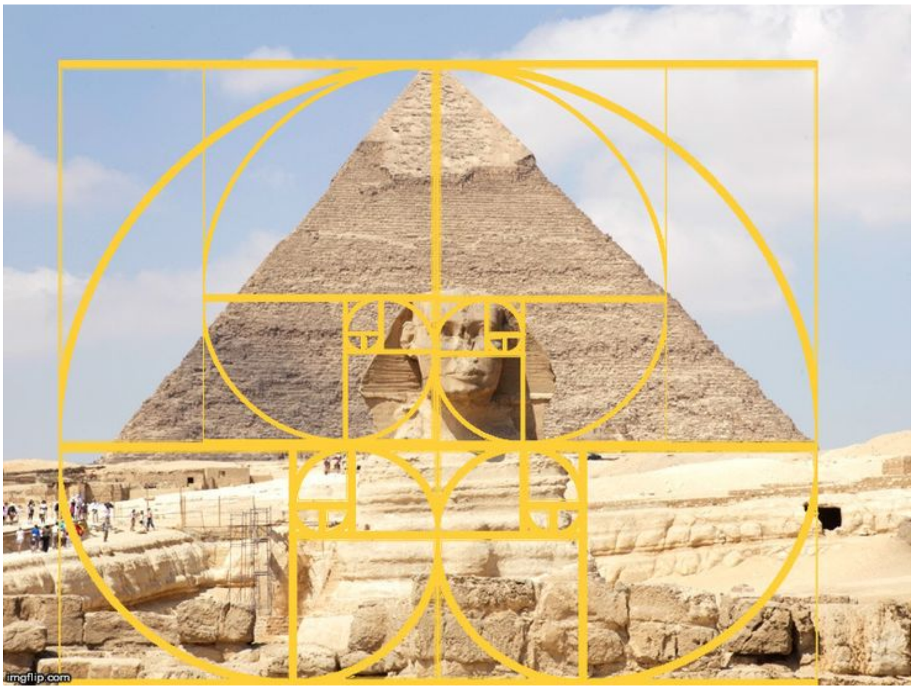
3.5 Der goldene Schnitt

Der **goldene Schnitt** φ (phi) ist eine mathematische Konstante mit dem Wert:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Definition des goldenen Schnitts

Eine Strecke wird im goldenen Schnitt geteilt, wenn sich die ganze Strecke zum grösseren Teil verhält wie der grössere zum kleineren Teil. Mathematisch: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$



Bezug zur Cheops-Pyramide: Einige Forscher behaupten, dass das Verhältnis der Seitenflächendicke zur halben Grundkante dem goldenen Schnitt entspricht:

$$\frac{h_s}{\frac{a}{2}} \approx \varphi$$

Überprüfung

$\frac{h_s}{\frac{a}{2}} = \frac{186,43}{115,18} \approx 1,618$

Der goldene Schnitt: $\varphi \approx 1,618$

Ergebnis: Die Werte stimmen auf drei Dezimalstellen überein!

3.6 Verbindung zur Kreiszahl π

Eine weitere faszinierende Behauptung besagt, dass der Umfang der Grundfläche im Verhältnis zur doppelten Höhe nahezu π ergibt:

$$\frac{U}{2h} \approx \pi$$

Berechnung

Umfang der Grundfläche: $U = 4a = 4 \cdot 230,36 = 921,44\,\text{m}$

Doppelte Höhe: $2h = 2 \cdot 146,59 = 293,18\,\text{m}$

Verhältnis: $\frac{921,44}{293,18} \approx 3,143$

Vergleich: $\pi \approx 3,14159$

Abweichung: Nur etwa 0,05%!

3.7 Kritische Bewertung mathematischer Theorien

Die scheinbaren Übereinstimmungen mit ϕ und π sind faszinierend – aber sind sie Absicht oder Zufall? Als kritische Denker müssen wir beide Möglichkeiten prüfen.

Argumente FÜR absichtliche Planung

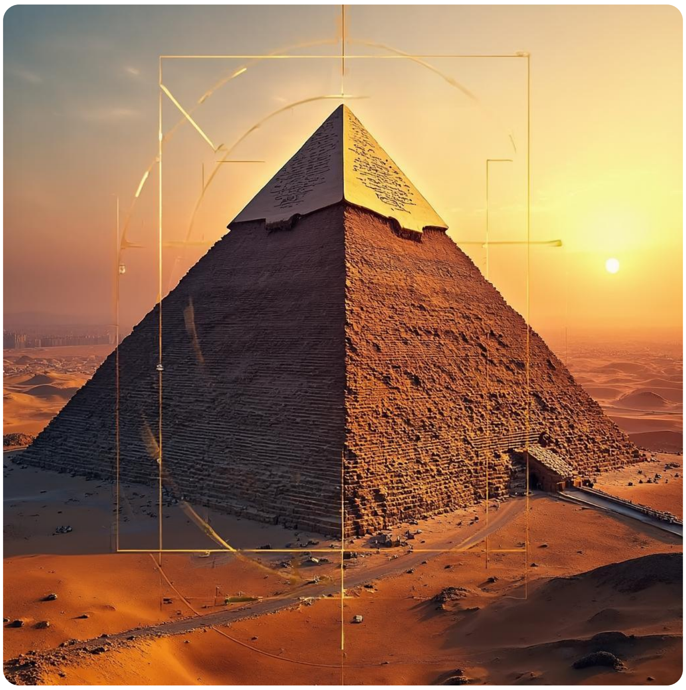
- Die Ägypter kannten geometrische Proportionen
- Die Übereinstimmungen sind zu genau für Zufall
- Andere Pyramiden haben ähnliche Proportionen
- Die ägyptische Elle (0,5236 m) hat einen Bezug zu π

Argumente GEGEN absichtliche Planung

- Keine schriftlichen Quellen belegen Kenntnis von ϕ oder π
- Die Übereinstimmungen entstehen durch den Neigungswinkel von ~51,5°
- Ein Neigungswinkel von 51,5° ergibt sich aus praktischen Bauüberlegungen
- Andere Pyramiden haben andere Neigungswinkel

Wissenschaftliche Einschätzung

Die meisten Ägyptologen und Mathematikhistoriker gehen davon aus, dass die Ägypter weder ϕ noch π als mathematische Konstanten kannten. Die Übereinstimmungen erklären sich durch die Wahl eines Neigungswinkels von etwa 51,5°, der sich aus praktischen Konstruktionsmethoden (z.B. dem Seked-System) ergab. Dennoch bleibt die Präzision des Bauwerks eine bemerkenswerte Leistung!



Zusammenfassung

Wichtige Formeln

Grösse	Formel
Grundfläche (Quadrat)	$G = a^2$
Volumen	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
Mantelfläche	$M = 2 \cdot a \cdot h_s$
Seitenflächendicke	$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
Seitenkante	$s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$
Neigungswinkel	$\alpha = \arctan\left(\frac{2h}{a}\right)$

Wichtiger Wortschatz

Pyramide: Körper mit Vieleck als Grundfläche und dreieckigen Seitenflächen, die sich in einer Spitze treffen

Grundfläche: Das Vieleck, auf dem die Pyramide steht

Seitenfläche: Die dreieckigen Flächen zwischen Grundfläche und Spitze

Körperhöhe: Senkrechter Abstand von der Spitze zur Grundfläche

Seitenflächendicke (Apotheme): Höhe der dreieckigen Seitenfläche

Seitenkante: Strecke von einer Ecke der Grundfläche zur Spitze

Neigungswinkel: Winkel zwischen Seitenfläche und Grundfläche

Goldener Schnitt (φ): Mathematische Konstante 1,618

Kreiszahl (π): Verhältnis von Umfang zu Durchmesser 3,14159

Das hast du gelernt

- Pyramiden sind geometrische Körper mit einer Grundfläche und dreieckigen Seitenflächen
- Die Cheops-Pyramide ist eine quadratische Pyramide mit bemerkenswerter Präzision
- Der Satz des Pythagoras und Trigonometrie ermöglichen Berechnungen in drei Dimensionen
- Volumen und Oberfläche lassen sich mit systematischen Formeln berechnen
- Die Proportionen der Cheops-Pyramide zeigen interessante Zusammenhänge mit ϕ und π
- Kritisches Denken ist wichtig bei der Bewertung mathematischer Theorien
- Mathematik und Kulturgeschichte sind eng miteinander verbunden

Zum Weiterdenken

Die Cheops-Pyramide zeigt uns, dass Mathematik nicht nur abstrakte Theorie ist, sondern seit Jahrtausenden praktische Anwendung findet. Welche modernen Bauwerke in der Schweiz – denk an den Gotthard-Basistunnel oder das Bundeshaus – könnten in 4500 Jahren ähnlich faszinieren? Welche mathematischen Prinzipien werden Archäologen der Zukunft an unseren Bauwerken entdecken?

GEFÜHRTE ÜBUNG

Die Geometrie der Cheops-Pyramide

FACH
Mathematik

KLASSE
Maths 9C

AUFGABEN
12

GESAMTPUNKTE
42

Anleitung: Bearbeite alle folgenden Aufgaben. Nutze die durchgerechneten Beispiele als Hilfe. Nimm dir Zeit und überprüfe deine Ergebnisse, bevor du sie abgibst.

Grundbegriffe einer Pyramide (3 Punkte)

Beispiel: Die *Grundfläche* ist das Vieleck, auf dem die Pyramide steht. Bei der Cheops-Pyramide ist diese ein Quadrat mit Seitenlänge ca. 230,36 m.

Vervollständige die folgenden Sätze. Schreibe deine Antworten in das Feld unten:

1. Die _______ ist der senkrechte Abstand von der Spitze zur Grundfläche.
2. Die _______ verbindet eine Ecke der Grundfläche mit der Spitze.
3. Der gemeinsame Schnittpunkt aller Seitenkanten heisst _______.

Tipp: Schau im Abschnitt 1 nochmals nach den Definitionen der Höhe, der Seitenkante und der Spitze.

Klassifikation von Pyramiden (3 Punkte)

Beispiel: Eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche heisst Tetraeder und besitzt 3 Seitenflächen.

Ordne jeder Pyramidenart die korrekte Anzahl Seitenflächen zu:

1. Vierseitige Pyramide Auswählen...
2. Sechseckige Pyramide Auswählen...
3. Fünfseitige Pyramide Auswählen...

Tipp: Die Anzahl der Seitenflächen entspricht der Anzahl der Ecken der Grundfläche.

Grundfläche berechnen (4 Punkte)

Durchgerechnetes Beispiel: Für $a = 230{,}36$ m gilt: $G = a^2 = (230{,}36)^2$ 53'066 m^2.

Berechne die Grundfläche einer quadratischen Pyramide mit Seitenlänge $a = 200$ m. Schreibe Rechenweg und Ergebnis (in m^2) in das Feld unten:

Tipp: Verwende die Formel $G = a^2$. Das Quadrat von 200 ist $200 \cdot 200$.

Volumenformel der Pyramide (3 Punkte)

Beispiel: Das Volumen einer Pyramide ist genau ein Drittel des Volumens eines Prismas mit gleicher Grundfläche und Höhe.

Welche Formel beschreibt das Volumen einer Pyramide korrekt?

- A) $V = G \cdot h$
- B) $V = \frac{1}{2} \cdot G \cdot h$
- C) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
- D) $V = 2 \cdot a \cdot h$

Tipp: Erinnere dich: Das Volumen einer Pyramide beträgt ein Drittel des entsprechenden Prismas.

Berechnungsschritte ordnen (3 Punkte)

Beispiel: Um das Volumen zu berechnen, brauchst du zuerst die Grundfläche, dann die Höhe und schliesslich die Volumenformel.

Bringe die Schritte zur Berechnung des Volumens der Cheops-Pyramide in die richtige Reihenfolge:

- Volumen mit $V = ⅓ \cdot G \cdot h$ ausrechnen
- Seitenlänge a und Höhe h notieren
- Grundfläche $G = a^2$ berechnen

Tipp: Was brauchst du zuerst, bevor du das Volumen berechnen kannst?

Seitenflächendicke mit Pythagoras (5 Punkte)

Durchgerechnetes Beispiel: Für die Cheops-Pyramide gilt: h_s = $(h^2 + (a/2)^2)$ = $(146{,}59^2 + 115{,}18^2)$ 186,43 m.

Berechne die Seitenflächendicke h_s einer quadratischen Pyramide mit a = 100 m und h = 60 m. Schreibe deinen vollständigen Rechenweg in das Feld unten:

Tipp: Verwende $h\_s^2 = h^2 + (a/2)^2$. Setze a/2 = 50 m und h = 60 m ein.

Strecken und Dreiecke zuordnen (4 Punkte)

Beispiel: Im Höhendreieck ist die halbe Grundkante a/2 eine Kathete und die Seitenflächendicke h_s die Hypotenuse.

Ordne jeder Grösse die richtige Beschreibung zu:

1. Körperhöhe h [Auswählen... ˅]

2. Seitenkante s [Auswählen... ˅]

3. Seitenflächendicke h_s [Auswählen... ˅]

4. Flächendiagonale d [Auswählen... ˅]

Tipp: Schau im Abschnitt 1.4 und 1.5 nach den genauen Definitionen.

Neigungswinkel mit Tangens (4 Punkte)

Durchgerechnetes Beispiel: Für die Cheops-Pyramide gilt: tan(α) = 2h/a = (2·146,59)/230,36 1,2725, also α 51,84°.

Berechne den Neigungswinkel α einer quadratischen Pyramide mit a = 80 m und h = 50 m. Schreibe Rechenweg und Ergebnis (auf zwei Dezimalstellen) in das Feld:

Tipp: Verwende tan(α) = 2h/a und dann α = arctan(...). Nutze deinen Taschenrechner im Modus DEG.

Begriffe kategorisieren (4 Punkte)

Beispiel: Die Höhe h ist eine Längenangabe (Strecke), während α ein Winkel ist.

Ziehe jeden Begriff in die passende Kategorie:

Neigungswinkel α | Seitenkante s | Grundfläche G | Körperhöhe h | Mantelfläche M | Grundkante a

Strecken / Längen

Flächen / Winkel

Tipp: Wird die Grösse in Metern (m), Quadratmetern (m^2) oder Grad (°) angegeben?

Volumen einer kleineren Pyramide (5 Punkte)

Durchgerechnetes Beispiel: Für die Cheops-Pyramide: $G = (230{,}36)^2$ 53'066 m^2, dann $V = ⅓ \cdot$ 53'066 $\cdot$ 146,59 2'593'400 m^3.

Eine Modell-Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit a = 30 m und eine Höhe h = 18 m. Berechne in zwei Schritten zuerst die Grundfläche G und dann das Volumen V. Schreibe alles in das Feld:

Tipp: Schritt 1: $G = a^2 = 30^2$. Schritt 2: $V = ⅓ \cdot G \cdot h$. Vergiss die Einheit m^3 nicht!

Goldener Schnitt erkennen (2 Punkte)

Beispiel: Bei der Cheops-Pyramide gilt h_s / (a/2)   186,43 / 115,18   1,618.

Welcher Wert entspricht dem goldenen Schnitt ϕ?

A) 3,14159

B) 2,71828

C) 1,41421

D) 1,61803

Tipp: ϕ = (1 + 5) / 2.

Kritische Bewertung (2 Punkte)

Beispiel: Argument FÜR absichtliche Planung: «Die Übereinstimmungen mit ϕ sind so genau, dass Zufall unwahrscheinlich erscheint.»

Nenne in 2–3 Sätzen ein Argument GEGEN die Annahme, dass die Ägypter den goldenen Schnitt ϕ oder die Kreiszahl π absichtlich in der Cheops-Pyramide verwendet haben. Schreibe deine Antwort in das Feld:

Tipp: Denke an schriftliche Quellen und an den praktischen Neigungswinkel von 51,5° (Seked-System).

SELBSTSTÄNDIGE ÜBUNG

Die Geometrie der Cheops-Pyramide

FACH
Mathematik

KLASSE
Mathematik 9C

AUFGABEN
12

PUNKTE GESAMT
42

Anweisungen: Bearbeite alle Aufgaben selbstständig. Arbeite jede Aufgabe sorgfältig durch und überprüfe deine Antworten, bevor du sie abgibst. Verwende einen Taschenrechner, wenn nötig. Runde Ergebnisse sinnvoll.

Volumen einer kleinen Modellpyramide (4 Punkte)

Im Verkehrshaus Luzern wird ein Modell der Cheops-Pyramide im Massstab 1:1000 ausgestellt. Die Grundkante des Modells beträgt 23,04 cm und die Höhe 14,66 cm.

Berechne das Volumen des Modells in cm^3. Zeige deinen Rechenweg in 2–4 Sätzen und runde sinnvoll.

Begriffe zuordnen (3 Punkte)

Ordne jedem Begriff die passende Beschreibung zu:

Körperhöhe h Auswählen...

Seitenkante s Auswählen...

Seitenflächendicke h_s Auswählen...

Kritische Bewertung: Goldener Schnitt (5 Punkte)

Manche Autoren behaupten, die alten Ägypter hätten den goldenen Schnitt ϕ 1,618 bewusst in der Cheops-Pyramide verwendet.

Nimm in 4–6 Sätzen kritisch Stellung. Nenne mindestens ein Argument FÜR und ein Argument GEGEN diese Behauptung und ziehe ein begründetes Fazit.

Volumenformel (2 Punkte)

Welche Formel beschreibt das Volumen einer Pyramide korrekt?

- A) $V = G \cdot h$
- B) $V = \frac{1}{2} \cdot G \cdot h$
- C) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
- D) $V = \frac{1}{4} \cdot G \cdot h$

Neigungswinkel berechnen (4 Punkte)

Eine quadratische Pyramide hat eine Grundkante von $a = 180$ m und eine Höhe von $h = 110$ m.

Berechne den Neigungswinkel α der Seitenflächen. Schreibe Formel, Rechnung und Ergebnis (gerundet auf eine Dezimalstelle) in 2–4 Sätzen auf.

Berechnungsschritte ordnen (4 Punkte)

Bringe die Schritte zur Berechnung der Seitenkante s einer quadratischen Pyramide (gegeben: a und h) in die richtige Reihenfolge:

Pythagoras anwenden: $s^2 = h^2 + (d/2)^2$

Werte für a und h notieren

Wurzel ziehen: $s = \ (s^2)$

Halbe Diagonale berechnen: $d/2 = (a \cdot \ 2)/2$

Vergleich mit Schweizer Bauwerk (3 Punkte)

Das Bundeshaus in Bern hat eine Kuppelhöhe von etwa 64 m. Die Cheops-Pyramide war ursprünglich 146,59 m hoch.

Berechne das Verhältnis der beiden Höhen und erkläre in 1–2 Sätzen, was das anschaulich bedeutet.

Eigenschaften kategorisieren (4 Punkte)

Ordne jede Aussage der richtigen Kategorie zu:

- Neigungswinkel der Seitenflächen ca. 30°
- Quadratische Grundfläche
- Sechseckige Grundfläche
- Vier gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen
- Zwei parallele Grundflächen
- Ursprüngliche Höhe ca. 146,6 m

Trifft auf die Cheops-Pyramide zu

Trifft NICHT zu

Multiple Choice: Pyramidengeometrie (3 Punkte)

Welche Aussage über eine quadratische Pyramide ist KORREKT?

- ○ A) Die Seitenkante s ist immer kürzer als die Körperhöhe h.
- ○ B) Die Seitenflächendicke h_s ist gleich der Körperhöhe h.
- ○ C) Die Diagonale der Grundfläche beträgt $d = a \cdot 2$.
- ○ D) Eine quadratische Pyramide hat fünf Seitenkanten.

Mantelfläche der Cheops-Pyramide (5 Punkte)

Gegeben: Grundkante a = 230,36 m und Höhe h = 146,59 m.

Berechne die Mantelfläche M der Cheops-Pyramide. Gehe in deinem Lösungstext (4–6 Sätze) folgendermassen vor:

- Berechne zuerst die Seitenflächendicke h_s mit dem Satz des Pythagoras.
- Wende anschliessend die Formel $M = 2 \cdot a \cdot h_s$ an.
- Gib das Ergebnis in m^2 an, sinnvoll gerundet.

π und die Cheops-Pyramide (2 Punkte)

Welche Beziehung ergibt bei der Cheops-Pyramide näherungsweise den Wert von π?

- A) Höhe geteilt durch Grundkante (h / a)
- B) Umfang der Grundfläche geteilt durch doppelte Höhe (U / 2h)
- C) Volumen geteilt durch Oberfläche (V / O)
- D) Diagonale geteilt durch Seitenkante (d / s)

Messdaten kritisch beurteilen (3 Punkte)

Die Forscher Petrie (1880) und Lehner (1984) ermittelten leicht unterschiedliche Werte für die Grundkante (230,36 m bzw. 230,33 m).

Erkläre in 2–3 Sätzen, ob diese Abweichung gross oder klein ist. Begründe mit einer Prozentangabe (Abweichung in % der Grundkante).

EVALUATION

Die Geometrie der Cheops-Pyramide – Volumen, Oberfläche und der goldene Schnitt

FACH
Mathematik

KLASSE
Maths 9C

DAUER
45 Minuten

GESAMTPUNKTE
60 Punkte

Anweisungen: Beantworte alle Fragen. Lies jede Frage sorgfältig durch, bevor du antwortest. Du kannst deine Antworten vor der Abgabe noch überprüfen und ändern.

Erkläre in 1–3 Sätzen, was eine quadratische Pyramide ist und welche besonderen Eigenschaften ihre Seitenflächen haben.

Wörter: 0 / Min: 10 / Max: 60
Punkte: 3

Welche Formel beschreibt den Flächeninhalt der quadratischen Grundfläche der Cheops-Pyramide mit der Seitenlänge a?

A) G=12·a·a

B) G=a2

C) G=4·a

D) G=a3

Punkte: 2

Vervollständige den folgenden Text über Pyramiden:

Eine -- Auswählen -- hat -- Auswählen -- und wird nach der Form ihrer Grundfläche benannt, welche aus -- Auswählen -- besteht.

Punkte: 3

Die Körperhöhe h einer Pyramide und die Seitenflächenhöhe hs sind identisch.

Wahr

Falsch

Punkte: 1

Ordne jeden Begriff der richtigen Beschreibung zu:

Klicke zuerst ein Element links, dann das passende Element rechts an.

Körperhöhe (h)

Seitenflächenhöhe (h_s)

Seitenkante (s)

Grundkante (a)

Verbindet eine Ecke der Grundfläche mit der Spitze

Senkrechter Abstand von der Spitze zur Grundfläche

Begrenzt die Grundfläche der Pyramide

Höhe des dreieckigen Seitenflächendreiecks

Punkte: 4

Ergänze die fehlende Angabe:

Die ursprüngliche Körperhöhe der Cheops-Pyramide betrug laut der Vermessung von Flinders Petrie (1880)

Meter.

Punkte: 2

Wie lautet die Formel für das Volumen einer quadratischen Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h?

A) $V=G\cdot h$

B) $V=12\cdot G\cdot h$

C) $V=13\cdot G\cdot h$

D) $V=14\cdot G\cdot h$

Punkte: 2

Die Mantelfläche einer quadratischen Pyramide berechnet man mit der Formel $M=2\cdot a\cdot hs$.

Wahr

Falsch

Punkte: 1

Bringe die folgenden Berechnungsschritte für die Gesamtoberfläche einer quadratischen Pyramide in die richtige Reihenfolge:

Ziehe die Schritte in die richtige Reihenfolge.

- Mantelfläche berechnen: $M=2\cdot a\cdot hs$
- Grundfläche berechnen: $G=a2$
- Gesamtoberfläche addieren: $O=G+M$
- Seitenflächenhöhe berechnen: $hs=h2+(a/2)2$

Punkte: 3

Erkläre in eigenen Worten, wie man mithilfe des Satzes von Pythagoras die Seitenflächenhöhe hs einer Pyramide berechnen kann. Welche Grössen sind dabei Katheten und welche ist die Hypotenuse?

Wörter: 0 / Min: 10 / Max: 60

Punkte: 3

Mit welcher trigonometrischen Funktion berechnet man den Neigungswinkel α einer Pyramide aus der Körperhöhe h und der halben Grundkante $a2$?

A) $\sin(\alpha)=ha/2$

B) $\tan(\alpha)=ha/2$

C) $\cos(\alpha)=ha/2$

D) $\tan(\alpha)=a/2h$

Punkte: 2

Berechne und ergänze:

Die Seitenkante s der Cheops-Pyramide (mit h=146,59m und a=230,36m) beträgt gerundet auf zwei Dezimalstellen: s

m.

Punkte: 2

Ordne die folgenden Formeln der richtigen Berechnungsmethode zu:
Ziehe die Formeln in die passende Kategorie.

α=arctan(2h/a)

d=a2

tan(α)=h/(a/2)

hs2=h2+(a/2)2

sin(α)=Gegenkathete/Hypotenuse

s2=h2+(a2/2)2

Satz des Pythagoras

Trigonometrie

Punkte: 4

Wähle ALLE richtigen Aussagen über die Cheops-Pyramide aus:

- [ ] Die Grundfläche ist ein nahezu perfektes Quadrat mit einer Seitenlänge von ca. 230,36 m.
- [ ] Die heutige Höhe der Pyramide entspricht der ursprünglichen Höhe von 146,59 m.
- [ ] Die vier Seitenflächen sind identische gleichschenklige Dreiecke.
- [ ] Der Neigungswinkel der Seitenflächen beträgt ca. 51,5°.
- [ ] Die Spitze der Cheops-Pyramide ist heute noch vollständig erhalten.

Punkte: 3

Berechne das Volumen der Cheops-Pyramide mit $a=230{,}36m$ und $h=146{,}59m$. Zeige alle Rechenschritte und gib das Ergebnis an. Erkläre ausserdem kurz, was der Faktor 13 in der Volumenformel bedeutet.

Wörter: 0 / Min: 15 / Max: 70
Punkte: 3

Das Verhältnis $hsa/2\ \ 1{,}618$ der Cheops-Pyramide entspricht dem goldenen Schnitt ϕ.

Wahr

Falsch

Punkte: 1

Ergänze die Lücken über die mathematischen Besonderheiten der Cheops-Pyramide:

Der goldene Schnitt ϕ hat den Wert -- Auswählen -- . Die Beziehung zur Kreiszahl π zeigt sich, wenn man den -- Auswählen -- durch die -- Auswählen -- dividiert. Das Ergebnis ist ungefähr -- Auswählen -- .

Punkte: 4

Berechne die Gesamtoberfläche der Cheops-Pyramide mit $a=230{,}36m$ und $hs\ \ 186{,}43m$. Zeige alle Teilschritte (Mantelfläche, Grundfläche, Summe) und gib das Endergebnis an.

Wörter: 0 / Min: 15 / Max: 70
Punkte: 3

Was sagt die wissenschaftliche Einschätzung der meisten Ägyptologen und Mathematikhistoriker zu den Übereinstimmungen mit ϕ und π in der Cheops-Pyramide?

A) Die Ägypter kannten sowohl ϕ als auch π als exakte mathematische Konstanten und planten die Pyramide bewusst danach.

B) Die Übereinstimmungen sind rein zufällig und haben keine praktische Bedeutung.

C) Nur π war den Ägyptern bekannt, nicht aber ϕ.

D) Die Übereinstimmungen entstehen durch die Wahl eines Neigungswinkels von ca. 51,5°, nicht durch bewusste Planung mit ϕ oder π.

Punkte: 2

Ergänze den Wert:

Der goldene Schnitt $\phi=1+52$ hat einen Näherungswert von ϕ

.

Punkte: 2

Ordne jede Formel der richtigen geometrischen Grösse zu:
Klicke zuerst ein Element links, dann das passende Element rechts an.
$V = \frac{1}{3